Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów gimnazjów. Etap Wojewódzki

Rozwiązania i punktacja

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 10. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi jedną poprawną odpowiedź. W przypadku pomyłki na karcie odpowiedzi należy wypełnić następny diagram z odpowiedziami. Diagramy z niepoprawnymi odpowiedziami powinny zostać przekreślone wzdłuż przekątnych. Zaznaczenie więcej niż jednej odpowiedzi w jednym zadaniu jest równoznaczne z niepoprawną odpowiedzią.

Zadanie 1. (*1 punkt*) Kwadrat ma pole powierzchni $36\,\mathrm{cm}^2$. Ile wynosi jego obwód w skali 1:3?

A 18 cm **B** 72 cm **C** 2 cm **D** 12 cm **E** $\boxed{\text{8 cm}}$

Zadanie 2. (*1 punkt*) Która z podanych liczb spełnia jednocześnie nierówności:

$$x^2 > 9 \qquad \text{i} \qquad x + 2 < 8$$

A $\boxed{-4}$ **B** -2 **C** 0 **D** 6 **E** 8

Zadanie 3. (*1 punkt*) Gwóźdź i dwie śrubki z nakrętkami ważą 4,7 g. Gwóźdź i dziesięć pinezek waży 2,4 g, a gwóźdź i jedna śrubka z nakrętką waży 2,8 g. Ile waży pinezka?

A 1 g **B** 5,2 g **C** $\boxed{\text{0,15 g}}$ **D** 0,30 g **E** 0,52 g

Zadanie 4. (*1 punkt*) Z miasta A do miasta B wychodzi turysta, który dziennie wykonuję 28 km. W tym samym czasie z B do A wychodzi turystka, która przebywa dziennie drogę równa 24 km. Odległość między miastami wynosi 260 km. Po ilu dniach turysta spotka się z turystką?

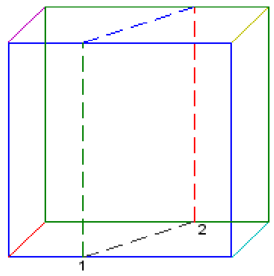
A po trzech dniach **B** po czterech dniach **C** $\boxed{\text{po pięciu dniach}}$

D po sześciu dniach **E** po siedmiu dniach.

Zadanie 5. (*1 punkt*) Tomek korzysta z karty bankomatowej, której PIN składa się z takich samych cyfr, co jego rok urodzenia 1977. Jaka jest największa liczba prób, które musiałby wykonać gdyby zapomniał prawidłowe ustawienie cyfr w swoim PINie?

A $\boxed{12}$ **B** 15 **C** 6 **D** 9 **E** 24

Zadanie 6. (*1 punkt*) Sześcian o krawędzi 3 cm podzielono na dwa jednakowe graniastosłupy (zobacz rysunek). Ile wynosi objętość jednego z tak powstałych graniastosłupów?



A $9\,\text{cm}^3$ **B** $12\,\text{cm}^3$ **C** $\boxed{13,5\,\text{cm}^3}$ **D** $15\,\text{cm}^3$ **E** $27\,\text{cm}^3$

Zadanie 7. (*1 punkt*)

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2016}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2017}\right)=?$$

A 2017 **B** $\frac{2017}{2}$ **C** $\boxed{1009}$ **D** 2016 **E** 1

Zadanie 8. (*1 punkt*) W klasie IId jest o 30% więcej uczniów niż w klasie IIc. W celu wyrównania liczby uczniów w obu klasach z klasy IId troje uczniów przeszło do klasy IIc. Ilu uczniów jest teraz w każdej klasie ?

A 33 **B** $\boxed{23}$ **C** 24 **D** 18 **E** 20

Zadanie 9. (*1 punkt*) Kąt między małą i dużą wskazówką o godz 12:30 wynosi:

A 180^o **B** 170^o **C** 150^o **D** 160^o **E** $\boxed{165^o}$

Zadanie 10. (*1 punkt*) Która z liczb jest liczbą całkowitą?

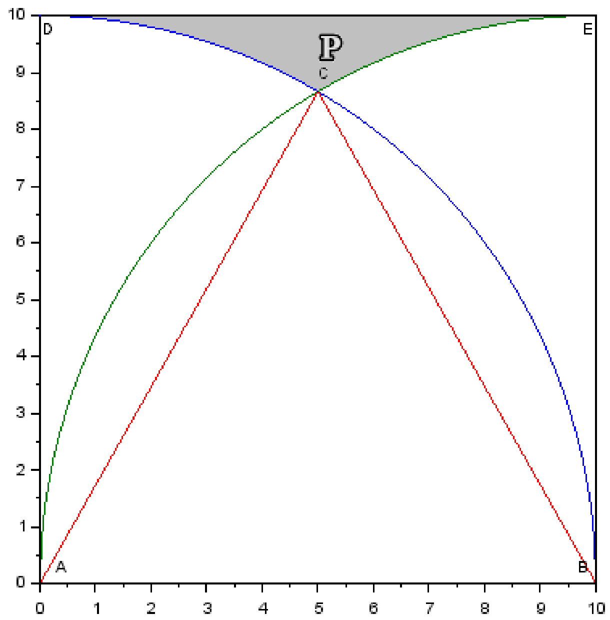
A $\sqrt{2^{2016}+2^{2017}}$ **B** $\boxed{\sqrt{2^{2014}+2^{2017}}}$ **C** $\sqrt[3]{3^{2017}}$

D pole koła o promieniu 10 **E** przekątna kwadratu o boku 4

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań od 11. do 15. należy zapisać w wyznaczonym miejscu pod ich treścią.

Zadanie 11. (*4 punkty*) Na ogrodzonej kwadratowej łące o boku 10 m pasie się koza. Koza przywiązana jest łańcuchem o długości 10 m do jednego z rogów ogrodzenia. Po 75 dniach koza zjadła całą dostępną trawę, w związku z tym gospodarz przywiązał kozę do sąsiadującego rogu. Po zjedzeniu przez kozę całej dostępnej trawy gospodarz odwiązał kozę, tak, że mogła się paść na pozostałej części łąki. Na ile całych dni wystarczy jeszcze kozie trawy? Wykonaj rysunek w skali 1:100. Przyjmij, że bok pojedynczej kratki ma długość 5 mm.



Zakładamy, że pierwszy punkt przywiązania kozy znajduje się w rogu łąki oznaczonym przez **A**. Część łąki którą ma w zasięgu koza ma kształt wycinka koła o promieniu 10 m i kącie środkowym 90^o. Powierzchnia tego wycinka wynosi

$$P_1 = \frac{90^o}{360^o} \cdot \pi \cdot 10^2 \mathrm{m}^2 = 25 \cdot \pi \, \mathrm{m}^2$$

Koza zjadła trawę z tego obszaru w ciągu 75 dni, więc dziennie zjadała w przyblizeniu $\frac{25\cdot\pi}{75}\,\mathrm{m}^2 = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{m}^2 = 1,047\,\mathrm{m}^2$

Po 75 dniach koza została przywiązana w punkcie **B** i miała w zasięgu trawę w obszarze ograniczonym łukami między punktami **A** i **C** oraz punktami **C** i **E** oraz granicą łąki. Część łąki, która zostanie po odwiązaniu kozy ograniczona jest łukami między punktami **C** i **D** i punktami **C** i **E** oraz górną granicą działki. Pole tej części łąki można obliczyć odejmując od pola całkowitego łąki pole trójkąta równobocznego **ABC** i pola dwóch wycinków koła o promieniu 10m i kącie środkowym 30^o (na rysunku są to wycinki **ACD** i **BCE**). Tak więc, pole powierzchni łąki z trawą po odwiązaniu kozy jest równe :

$$P = 10^2\,\mathrm{m}^2 - \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2 - 2 \cdot \frac{30^o}{360^0} \cdot \pi \cdot 10^2\,\mathrm{m}^2$$

$$P = 25 \cdot \left(4 - \sqrt{3} - \frac{4}{6}\pi\right)\,\mathrm{m}^2 = 25 \cdot (4 - 1,73 - 2,09)\,\mathrm{m}^2 = 4,42\,\mathrm{m}^2$$

Dzieląc tę powierzchnię przez ilość trawy którą koza zjada dziennie otrzymujemy 4 całe dni. Możliwe są inne sposoby obliczenia pola powierzchni dostępnej dla kozy po odwiązaniu, np. obliczenie pola powierzchni odcinka koła ograniczonego bokiem trójkąta **AC** i łukiem **AC** i odjęcie od wycinka koła **ACD** i obliczenie w ten sposób pola powierzchni dostępnej przy drugim przywiązaniu. Wszystkie poprawne sposoby obliczania powierzchni łąki po odwiązaniu kozy są traktowane jednakowo.

Punktacja

1. Poprawny rysunek - *1 punkt*
2. Obliczenie dziennego spożycia - *1 punkt*
3. Poprawny sposób obliczania powierzchni dostęponej łąki po odwiązaniu kozy - *1 punkt*
4. Poprawny wynik - *1 punkt*

Zadanie 12. (*4 punkty*) Mamy do dyspozycji 10 odważników o wagach 1 kg, 2 kg, ...,10 kg. Na lewej szalce wagi należy umieścić dwa ciężarki, a na prawej jeden ciężarek spośród dostępnych ciężarków, tak aby waga była w równowadze. Na ile sposobów można to zrobić?

Na prawej szalce ustawiamy kolejno odważniki od najwyższego i sprawdzamy na ile sposobów można zrównoważyć przy pomocy dwóch odważników na lewej szalce.

prawa szalka	lewa szalka	liczba możliwości
10kg	(9kg+1kg),(8kg+2kg), (7kg+3kg),(6kg+4kg)	4
9kg	(8kg+1kg),(7kg+2kg), (6kg+3kg),(5kg+4kg)	4
8kg	(7kg+1kg),(6kg+2kg), (5kg+3kg)	3
7kg	(6kg+1kg),(5kg+2kg), (4kg+3kg)	3
6kg	(5kg+1kg),(4kg+2kg)	2
5kg	(4kg+1kg),(3kg+2kg)	2
4kg	(3kg+1kg)	1
3kg	(2kg+1kg)	1
	łącznie	20

Punktacja

1. Poprawne rozwiązanie zadanie - *4 punkt*
2. minus *1 punkt* za błąd rachunkowy lub pominięcie jednej prawidłowej odpowiedzi
3. minus *2 punkt* j.w. i pominięcie 2 prawidłowych odpowiedzi

Zadanie 13. (*4 punkty*) Przekątne ścian prostopadłościanu są równe $13\,\mathrm{cm}, 20\,\mathrm{cm}, \sqrt{281}\,\mathrm{cm}$. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Oznaczając krawędzie prostopadłościanu przez a, b, c można napisać następujące równania wynikające z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + b^2 = 13^2, \qquad a^2 + c^2 = 20^2, \qquad b^2 + c^2 = (\sqrt{281})^2$$

Rozwiązaniem tego układu równań są wartości:

$$a = 12\,\mathrm{cm}, \qquad b = 5\,\mathrm{cm}, \qquad c = 16\,\mathrm{cm}$$

Objętość prostopadłościanu:

$$V = a \cdot b \cdot c \qquad \text{czyli} \qquad V = 12 \cdot 5 \cdot 16\,\mathrm{cm}^3 = 960\,\mathrm{cm}^3$$

Punktacja

1. Ułożenie równań - *2 punkt*
2. Wyznaczenie przynajmniej dwóch krawędzi - *1 punkt*
3. Poprawne wyznaczenie objętości - *1 punkt*

Zadanie 14. (*4 punkty*) Pani Agnieszka ma więcej córek niż synów. Zapytana ilu ma synów i córek odpowiedziała:
-Gdybym miała 2 razy więcej synów niż mam, to miałabym ośmioro dzieci.
Jeden z jej synów dodał:
-Gdyby mama miała 2 razy mniej córek, to miałaby tylko czworo dzieci.
Ile córek i synów ma pani Agnieszka? (znajdź wszystkie możliwe rozwiązania).

Oznaczenia: x - liczba synów
y - liczba córek

Z warunków zadania wynikają następujące równania:

$$2x + y = 8, \qquad \frac{1}{2}y + x = 4, \qquad x < y$$

Rozwiązania tych równań powinny być liczbami całkowitymi. Można zauważyć że pierwsze równanie można uzyskać z drugiego przez przemnożenie prze dwa, więc równania są zależne. Znajdujemy całkowite rozwiązania biorąc pod również fakt że córek jest więcej niż synów. Całkowitymi rozwiązaniami są :

$$x = 1,\ y = 6$$

lub

$$x = 2,\ y = 4$$

Punktacja

1. Napisanie poprawnych równań - *2 punkt*
2. Wyznaczenie poprawnych rozwiązań - *2 punkt*
3. Odpowiedź nie spełniająca warunków zadania - minus *1 punkt*

Zadanie 15. (*4 punkty*) Suma siedmiu kolejnych liczb naturalnych począwszy od pewnej liczby a jest równa sumie sześciu następnych, kolejnych liczb naturalnych począwszy od liczby $a + 7$. Wyznacz liczbę a.

Z warunków zadania można wyprowadzić równanie:

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6) = (a+7)+(a+8)+(a+9)+(a+10)+(a+11)+(a+12)$$

$$7a + 21 = 6a + 57$$

$$a = 36$$

Punktacja

1. Poprawne rozwiązanie zadania - *4 punkt*
2. Poprawne ułożenie równania i niepoprawny wynik - minus *1 punkt*
3. Błąd w równaniu - minus *1 punkt*